FEUILLE DE TD1 - EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On rappelle que si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F})$ de fonction de répartition F_X, sa fonction quantile est définie comme l'inverse à gauche de F_X, c'est-à-dire que pour $u \in (0,1)$, $Q_X(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq u\}$. Si $\mathcal{L}$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on note $X \sim \mathcal{L}$ pour signifier que X est de loi $\mathcal{L}$.

Exercice 1. Calculer la fonction de répartition et la fonction quantile associées aux variables aléatoires suivantes :

(1) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
(2) $X \sim \mathcal{C}(c)$ avec $c > 0$, où $\mathcal{C}(c)$ désigne la loi de Cauchy de paramètre c, dont on rappelle que la densité est donnée par $\mathbb{P}_X(dx) = \frac{c}{\pi(x^2+c^2)}dx$.
(3) $X \sim \text{Pareto}(\theta)$ avec $\theta > 0$, où $\text{Pareto}(\theta)$ désigne la loi de Pareto de paramètre θ, dont on rappelle que la densité est donnée par $\mathbb{P}_X(dx) = \frac{\theta}{x^{1+\theta}}\mathbb{1}_{\{x\geq 1\}}dx$.
(4) $X(\Omega) = -1, 0, 1$, avec $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{4}$.

Exercice 2. On considère une variable aléatoire réelle quelconque X sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

(1) Montrer que pour tout $u \in (0,1)$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $F_X(x) \geq u \Leftrightarrow x \geq Q_X(u)$.
(2) Montrer que Q_X est une fonction croissante sur $(0,1)$.
(3) Montrer que si F_X est continue, alors $F_X(X) \sim \mathcal{U}([0,1])$.
(4) $(*)$ Montrer que Q_X est continue à gauche sur $(0,1)$. On pourra utiliser sans le redémontrer le fait qu'une fonction croissante f admet des limites finies à gauche et à droite en tout point x où elle est définie, qui vérifient $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$.